چند اثبات براي نامتناهي بودن مجموعه اعداد اول

اثبات اقليدس :

مقسوم عليه اولي چون n را در نظر بگيريد . اين عدد $N= p_1p_2\ldots p_{r+1}$ از عدد هاي اول ، عدد $\{p_1,\ldots,p_r\}$ به ازاي مجموعه متناهي دلخواه و بنا براين مقسوم عليه $P_1p_2\ldots p_r$ و هم مقسوم عليه حاصلضرب N هم مقسوم عليه p ها نيست . چون اگر چنين باشد ، p_i يكي از p دارد ولي p تفاضل $n-p_1p_2..p_r=1$ است كه غير ممكن است . پس هيچ مجموعه متناهي $\{p_1,..,p_r\}$ نمي تواند مجموعه همه عدد هاي اول باشد.

اثبات دوم :

فرض كنيد p: متناهي و p بزرگترين عدد اول باشد. عدد 2^{p-1} موسوم به عدد مرسن را در نظر بگيريد. و نشان مي دهيم كه هر عامل اول p از 2^{p-1} بزرگتر از p است و از اينجا نتيجه مطلوب به دست مي آيد . فرض كنيد q عدد اولي باشد كه 2^{p-1}را مي شمارد ، پس داريم (پيمانه q) $2^p \equiv 1$ چون p اول است ، اين بدان معني است كه عنصر 2 داراي مرتبه p در گروه ضربي $z_q\backslash\{0\}$ از هيات z_q است . اين گروه ، q-1 عضو دارد .

بنا بر قضيه لاگرانژ مي دانيم كه مرتبه هر عنصر اندازه‌ي گروه را مي شمارد . يعني داريم $p \mid q-1$. و از اين رو $p<q$.

اثبات سوم :

در اينجا عددهاي فرماي $f_n= 2^{2^n}+1$ را به ازاي n= 0,1,2,3.. در نظر مي گيريم . نشان خواهيم داد كه هر دو عدد فرما نسبت به هم اولند . پس بايد بي نهايت عدد اول وجود دارند . براي رسيدن به نتيجه ، رابطه بازگشتي

$$\prod_{k=0}^{n-1} f_k = f_n - 2 \qquad (n>=1)$$

را ثابت مي كنيم و ادعاي ما بلا فاصله از آن نتيجه مي شود . در واقع اگر m مثلا f_k و f_n (k<n) را بشمارد . آنگاه m عدد 2 را مي شمارد . و بنابر اين m=1 و m=2 ولي m=2 غير ممكن است زيرا همه ي عدد هاي فرما فردند. . براي اثبات رابطه بازگشتي از استقرا بر n استفاده مي كنيم.

به ازاي n=1 داريم $f_0=3 , f_1-2=3$ با استقرا مي توانيم نتيجه بگيريم :

$$f_n = (f_n-2)f_n= (2^{2n}-1)(2^{2n}+1)= 2^{2n+1}-1= \prod_{k=0}^{n-1} f_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} f_k\right) f_{n+1}-2$$

اصغر بهمنی
دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف

جهان کتابی است پر از فلسفه این کتاب در برابر چشمان ما گشوده است ولی تنها زمانی می توان آن را درک کرد که به زبان و نشانه های آن آشنا باشیم . این زبان ریاضیات و این نشانه ها مثلث ها و دایره ها و سایر شکل های هندسی هستند.
«گالیله»